

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

Приамурский государственный университет имени Шолом-Алейхема

Лицей

Методические рекомендации

«Визуализация и решение геометрических задач в приложении GeoGebra»

Выполнил:
ученик 10 класса
технологического профиля
Стародубова Ольга
Руководитель:
Одоевцева И.Г.

Биробиджан2019

Содержание

О программе GeoGebra и ее функциях.....	3
Типы геометрических задач:.....	7
Пошаговое решение задач в программе GeoGebra.....	8

О программе GeoGebra и ее функциях

GeoGebra – это бесплатная математическая программа для всех уровней образования, включающая в себя геометрию, алгебру, таблицы, графы, статистику и арифметику, в одном удобном для использования пакете.

Функции:

	Команда «Перемещать» Применяется для того, чтобы изменить ракурс построения и проверить, верно ли оно сделано.
	Команда «Точка» Выпадающее меню: 1.  – отметить новую точку 2.  – отметить точку на объекте 3.  – отметить точку пересечения двух прямых 4.  – отметить середину или центр 5.  – прикрепить/снять точку с объекта
	Команда «Прямая» Выпадающее меню: 1.  – построить прямую 2.  – построить отрезок 3.  – построить отрезок с фиксированной длиной 4.  – построить луч 5.  – построить вектор 6.  – отложить вектор
	Команда «Перпендикулярная прямая» Выпадающее меню: 1.  – построить перпендикулярную прямую 2.  – построить параллельную прямую

	3.  – построить биссектрису угла 4.  – построить касательную к окружности 5.  – построить поляр/диаметр окружности
	Команда «Многоугольник» Применяется для того, чтобы построить многоугольник
	Команда «Окружность» Выпадающее меню: 1.  – построить окружность по точке и оси 2.  – окружность с центром, радиусом и направлением 3.  – построить окружность по трем точкам 4.  – построить дугу по центру и двум точкам 5.  – построить дугу по трем точкам 6.  – построить сектор по центру и двум точкам 7.  – построить сектор по трем точкам
	Команда «Кривая пересечения» Применяется для того, чтобы построить сечение
	Команда «Плоскость» Выпадающее меню: 1.  – построить плоскость по трем точкам 2.  – построить плоскость (указав 3 точки, прямую и точку не лежащую на этой прямой или две прямые) 3.  – построить перпендикулярную плоскость 4.  – построить параллельную плоскость
	Команда «Фигуры» Выпадающее меню: 1.  – построить пирамиду 2.  – построить призму

	 3. – выдавить пирамиду или конус  4. – выдавить призму или цилиндр  5. – построить конус  6. – построить цилиндр  7. – построить тетраэдр  8. – построить куб  9. – сделать развертку многогранника
	Команда «Сфера» Выпадающее меню:  1. – построить сферу по центру и точке  2. – построить сферу по центру и радиусу
	С помощью команд из выпадающего меню можно узнать:  1. – угол в градусах  2. – расстояние/длину  3. – площадь фигуры  4. – объем фигуры
	Команда «Отражение» Выпадающее меню:  1. – отражение относительно плоскости  2. – отражение относительно прямой  3. – отражение относительно точки  4. – вращать объект вокруг прямой  5. – параллельный перенос по вектору
	Команда «Текст» Применяется ввода данных



Выпадающее меню:

1.  /  – вращать/перемещать чертеж
2.  /  – увеличить/уменьшить чертеж
3.  /  – показать/скрыть объект
4.  – показать/скрыть обозначение
5.  – копировать стиль на другой объект
6.  – удалить объект
7.  – показывает указанный объект

Типы геометрических задач:

1. Задачи на нахождение искомого

Пример 1: Найти периметр сечения тетраэдра $MABC$, которое параллельно отрезку MC и проходит через точки N и P – середины отрезков AC и BC соответственно. Все ребра тетраэдра равны 1. (Задача из ЕГЭ)

2. Определение взаимного расположения тел

Пример 2: Дана трапеция $ABCD$, ее основание AC лежит в плоскости α . Две параллельные прямые a и b проходят через точки D и B соответственно. Найти взаимное расположение прямой, которая пересекает плоскость α и AB . (Задача из учебника 10-11 классов)

3. Задачи на доказательство

Пример 3: Изобразите параллелепипед $ABCDEFGH$ и постройте его сечение плоскостью BKL , где точка K – середина ребра AE , а точка L – середина ребра CG . Докажите, что построенное сечение – параллелограмм. (Задача из учебника 10-11 классов)

Пример 4: Изобразите параллелепипед $ABCDEFGH$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через диагональ AC основания параллельно диагонали BH . Докажите, что если основание параллелепипеда – ромб и углы ABF и CBF прямые, то построенное сечение – равнобедренный треугольник. (Задача из учебника 10-11 классов)

4. Задачи на построение

Пример 5: Изобразите параллелепипед $ABCDEFGH$ и постройте его сечение плоскостью MNK , где точки M , N , K лежат соответственно на ребрах: а) BF , AE , AD ; б) CG , AD , BF . (Задача из учебника 10-11 классов)

Пример 6: Построить сечение тетраэдра $ABCD$ плоскостью, проходящей через точки E , F , G .

Пошаговое решение задач в программе GeoGebra

1. Нахождение искомого

Дано: $MABC$ – тетраэдр. $N \in a$, $P \in a$, $MC \parallel a$, a – плоскость сечения;

$MA=MB=MC=AB=BC=AC=1$; $AN=NC$, $PB=PC$

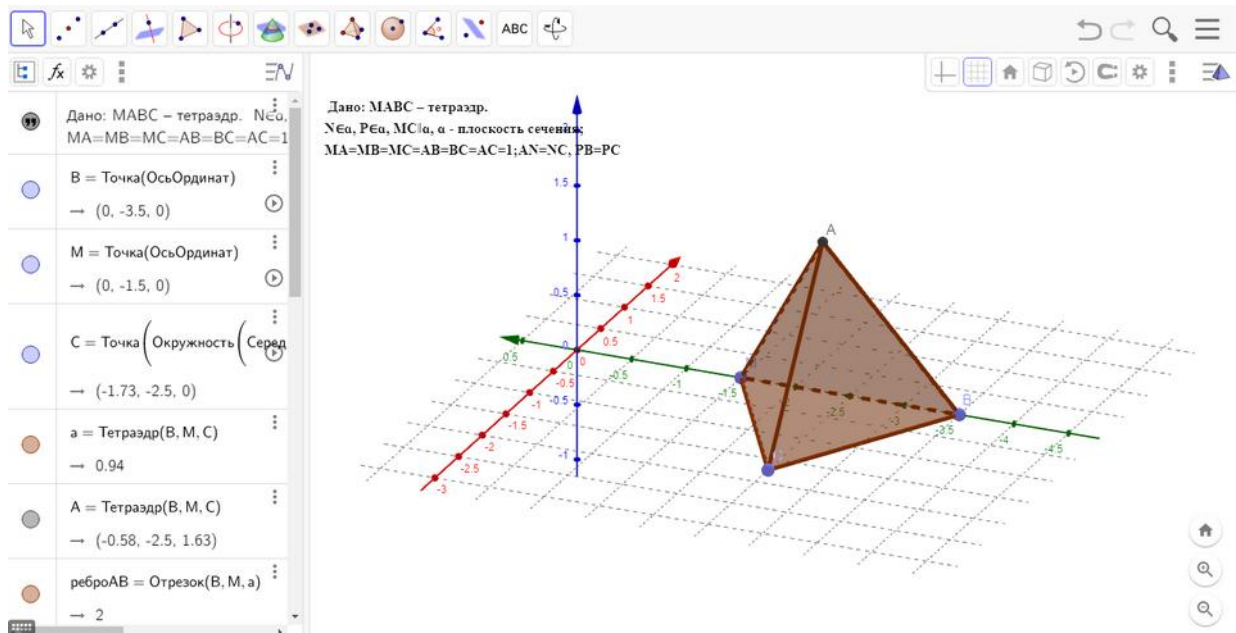
Найти: Периметр сечения

Сделаем построение:

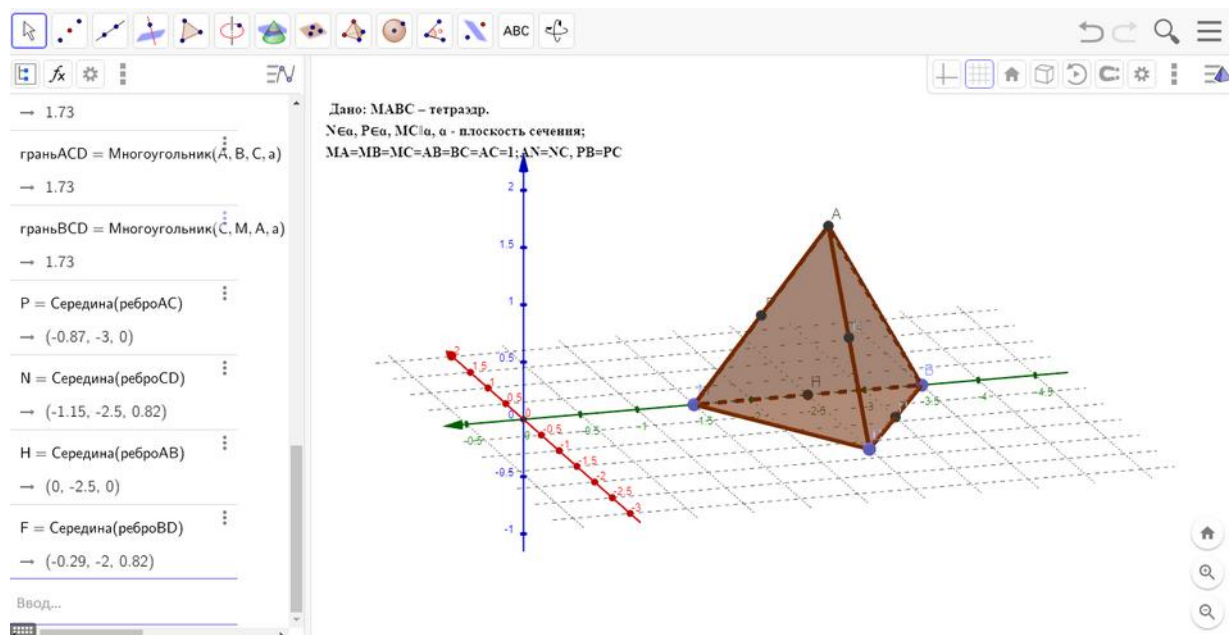
1) Нам дан тетраэдр $MABC$, который мы можем сделать с помощью команды



«Тетраэдр», указав две точки.



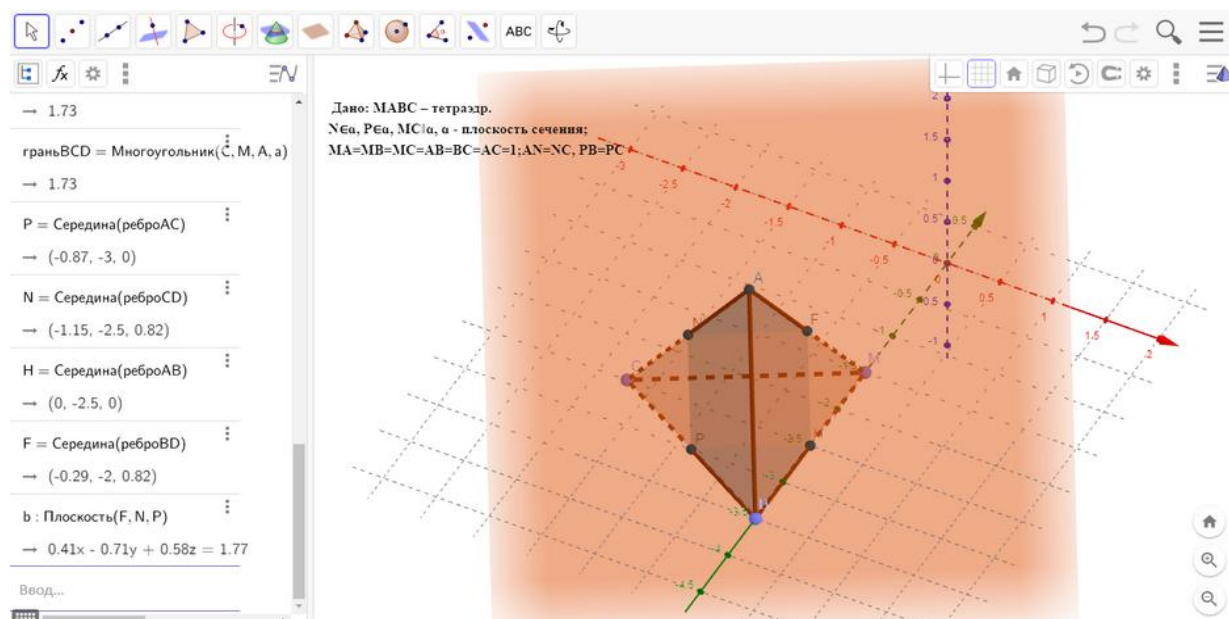
2) Укажем точки N и P , которые являются серединами отрезков AC и BC соответственно. Воспользуемся функцией «Середина или центр», указав нужный отрезок.



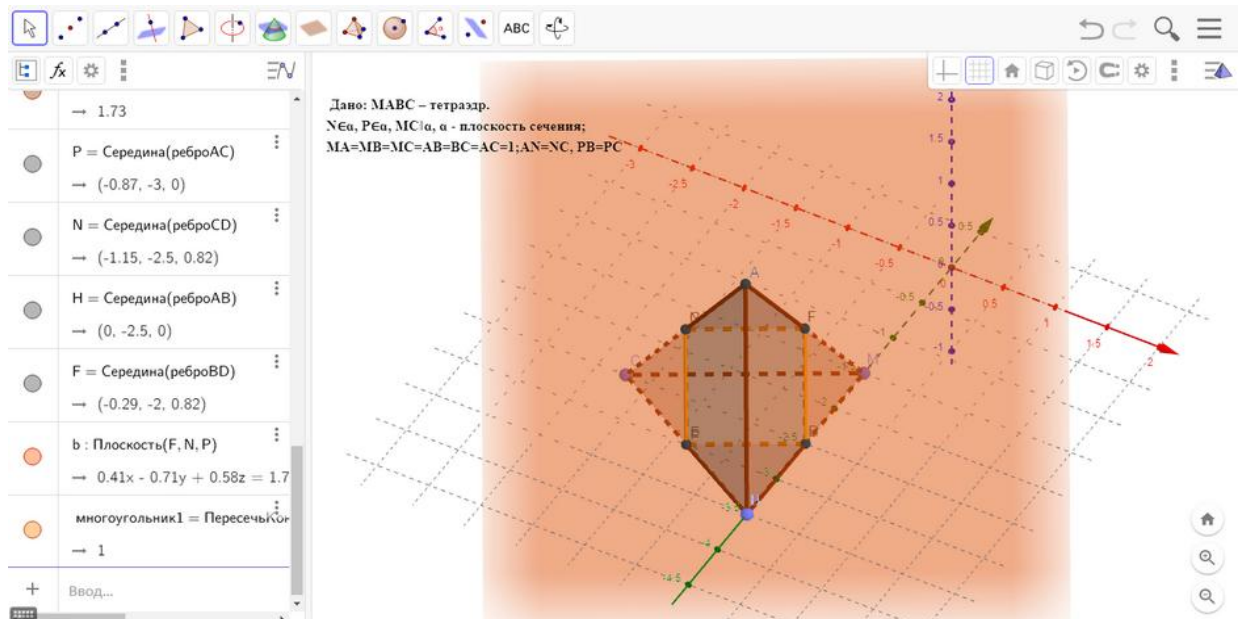
3) $AF=FM$
 $BH=HM$ } FH- средняя линия $\triangle AMB$

Сечение PNFH

4) Строим сечение. Для этого нам нужно построить плоскость через три точки – середины ребер, используя функцию «Плоскость по трем точкам». Из этого мы получаем пересечение плоскостей NFPE и BCM.



5)Используем функцию «Кривая пересечения». Наводим курсор на место пересечения двух плоскостей и получаем сечение тетраэдра.



$$\left. \begin{array}{l} AMB \cap a \\ ACB \cap a \end{array} \right\} FH \parallel NP$$

$$\left. \begin{array}{l} AMC \cap a \\ CMB \cap a \end{array} \right\} FN \parallel HP \Rightarrow FHPN \text{ - параллелограмм}$$

$$FH = PN = PH = FN = \quad *1$$

$$P = \quad *4 = 2$$

Ответ: 2

2. На определение взаимного расположения

Дано: ABCD-трапеция; $AC \in a$;

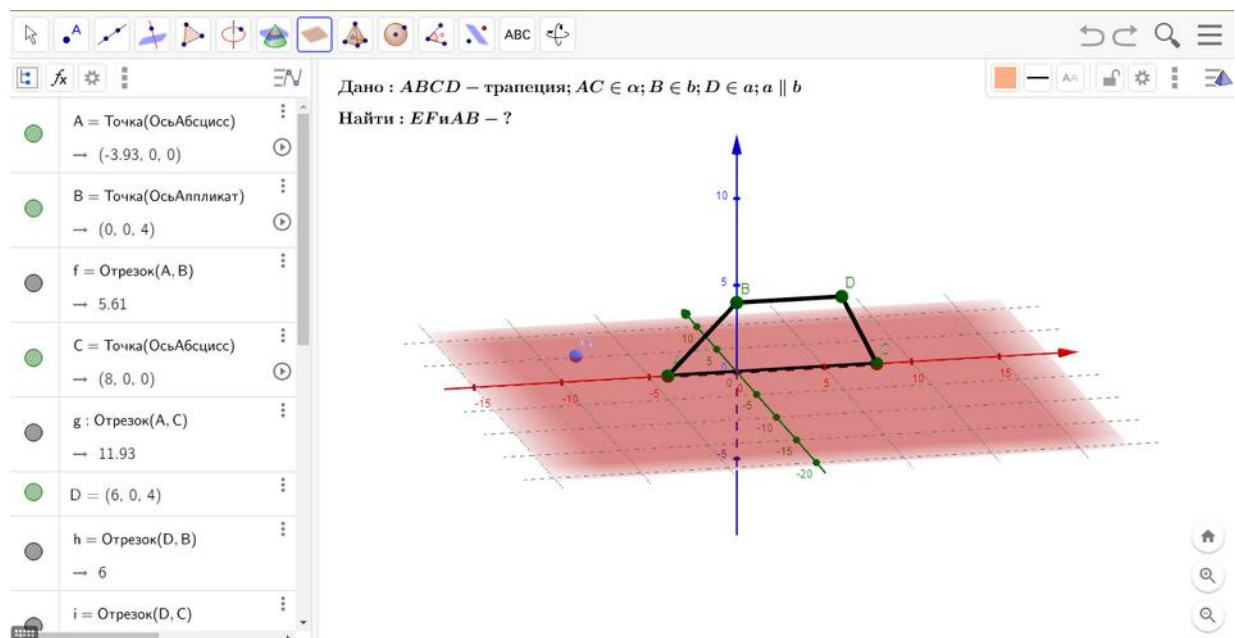
$B \in b$; $D \in a$; $a \parallel b$

Найти: взаимное расположение отрезков EF и AB

Сделаем построения:

1) ABCD – трапеция, построить которую мы можем с помощью операции «Отрезок»

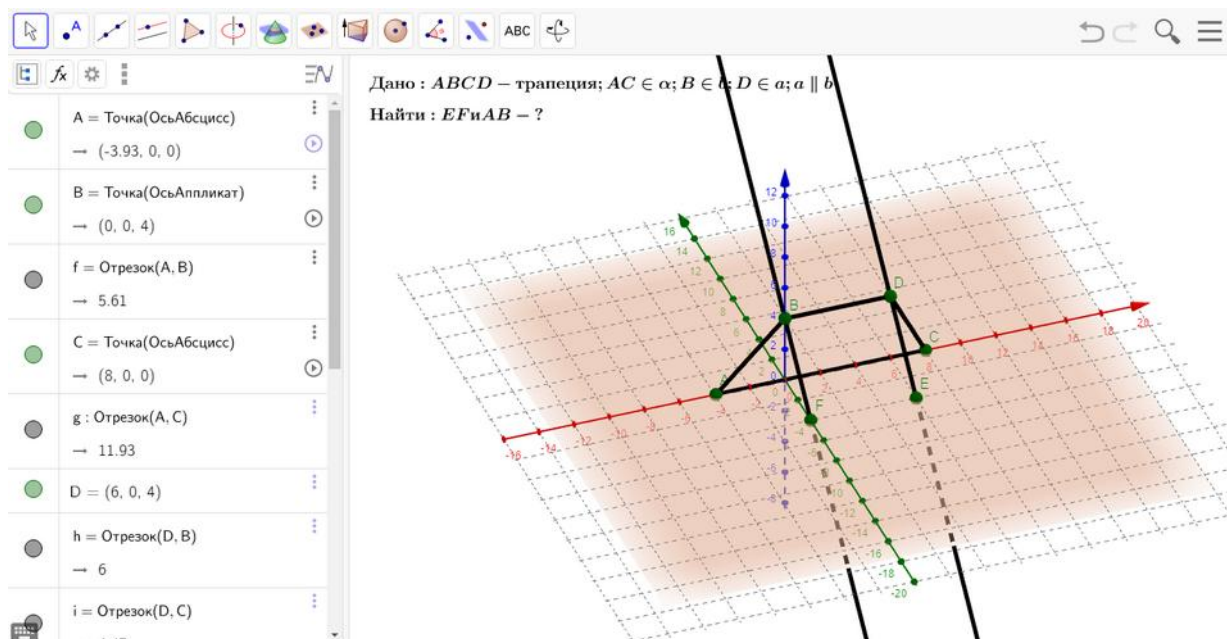
Плоскость a можно создать с помощью команды «Плоскость», обозначив прямую и точку, которая не лежит на этой прямой.



2) Нам даны прямые a и b , проходящие через точки D и B соответственно и пересекающие плоскость a в точках E и F . Здесь задача разделяется на два случая:

Рассмотрим первый случай

Точки F и E не будут пересекать основание многоугольника AC . Воспользуемся командой «Прямая» и укажем две точки.



Решение:

1) $b \notin AC$; $a \notin AC$

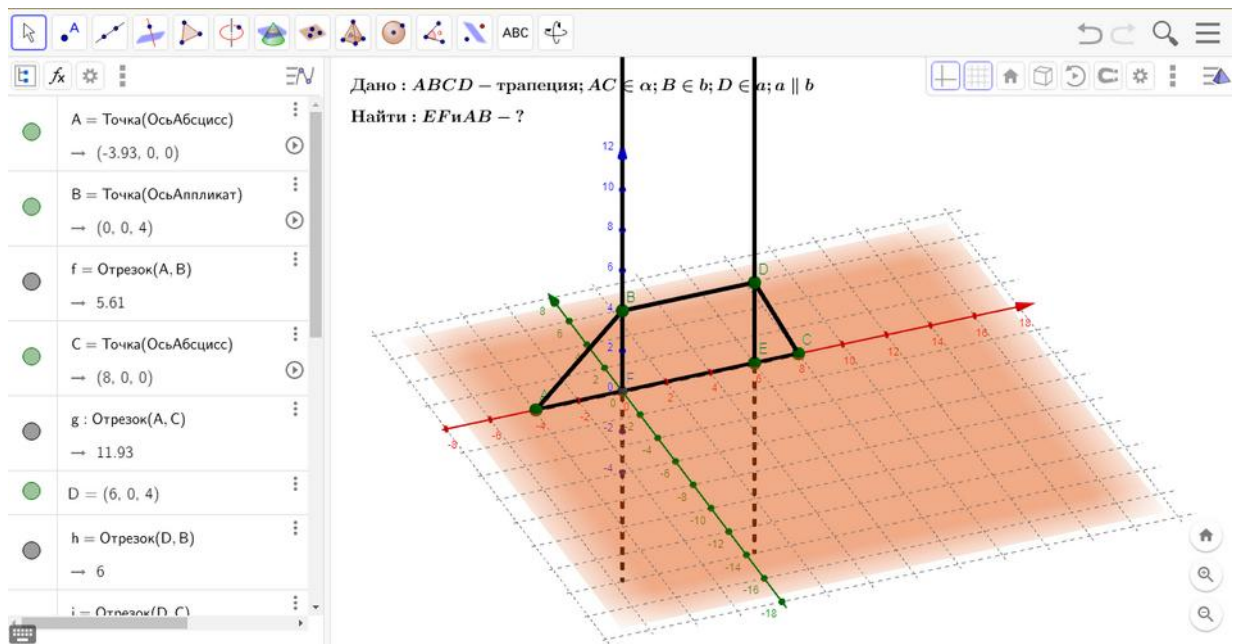
$$\left. \begin{array}{l} a \cap a = E; \\ b \cap a = F \end{array} \right\} EF \in a$$

$$\left. \begin{array}{l} EF \in a \\ AB \cap a = A \end{array} \right\} EF \div AB$$

Рассмотрим второй случай

Построение будет отличаться только тем, что прямые a и b будут пересекать основание многоугольника.

$$\left. \begin{array}{l} a \cap AC = E \\ b \cap AC = F \end{array} \right\} EF \in AC \rightarrow EF \cap AB = A$$



3. На доказательство

1) Дано: ABCDEFGH – параллелограмм, BKL – сечение

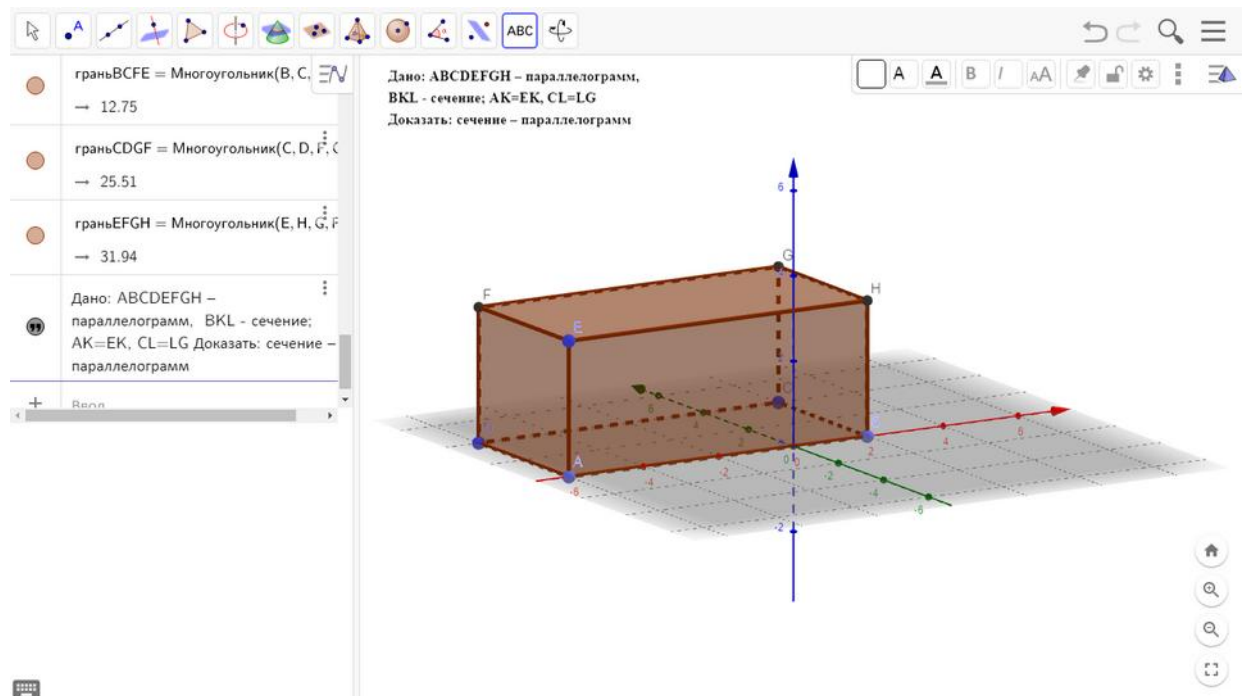
$AK = EK, CL = LG$

Доказать: сечение – параллелограмм

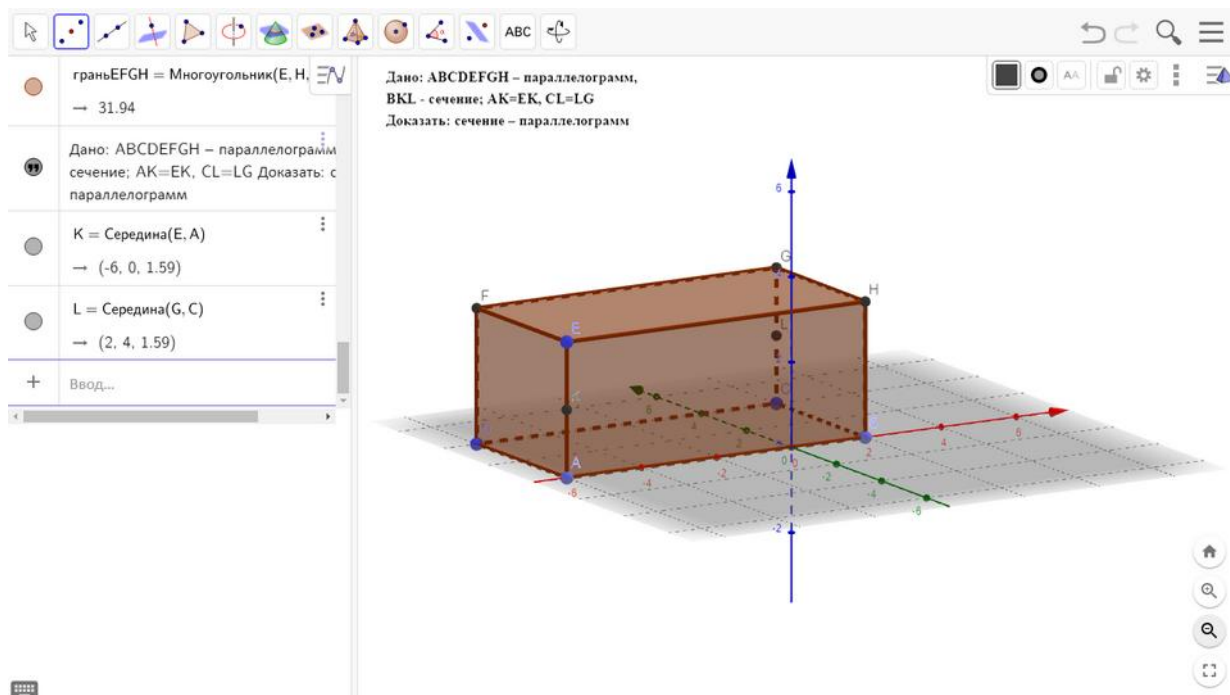
Доказательство:

Сделаем построения

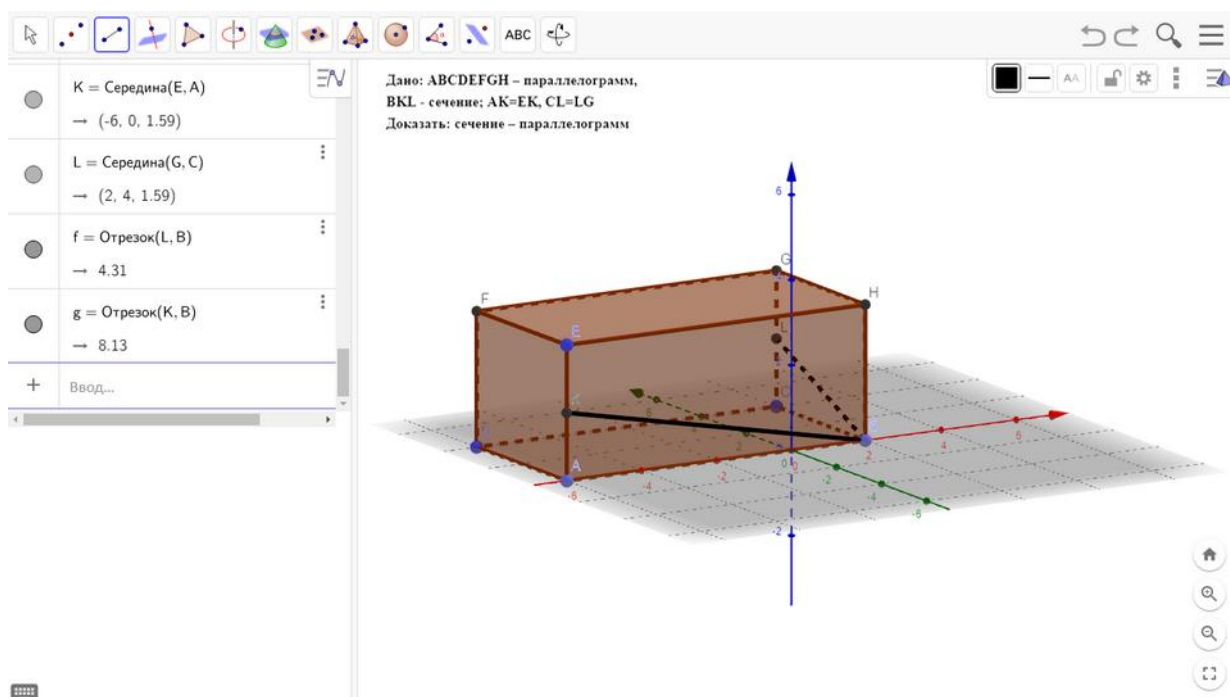
Для построения параллелепипеда нам понадобится команда «Призма », мы строим четырехугольник и указываем его вершины, затем выравниваем по пунктиру до параллелепипеда.



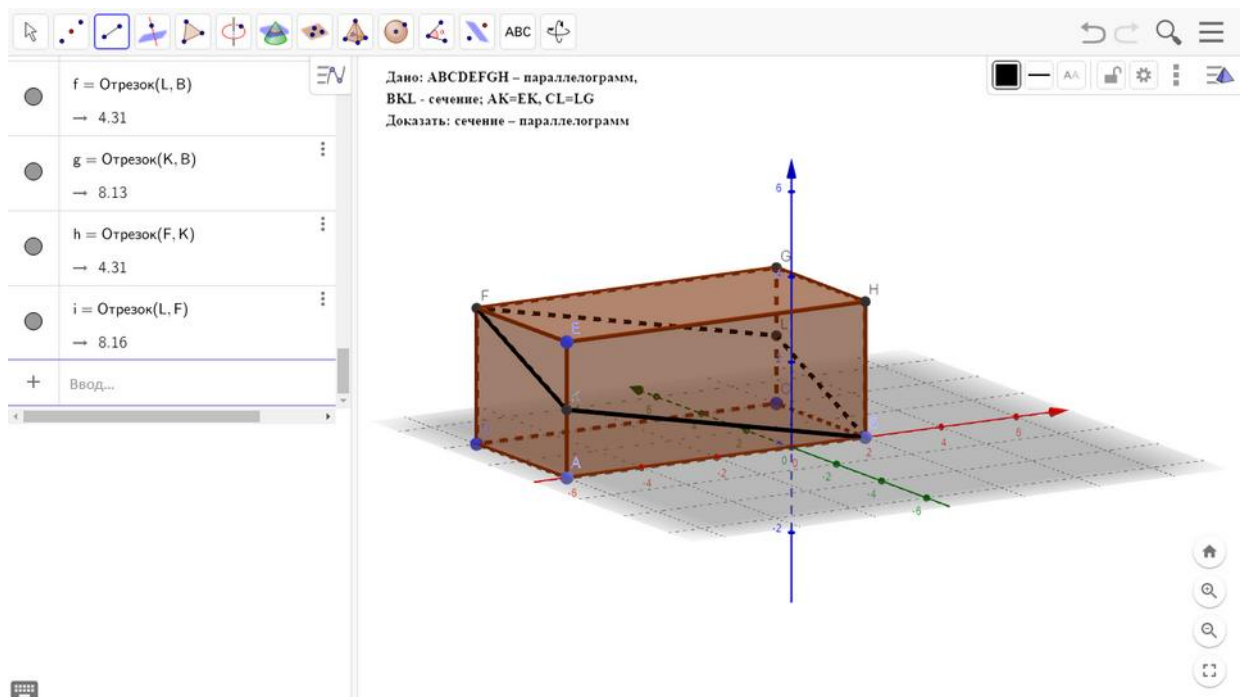
Отмечаем точки K и L – середины отрезков AE и CG с помощью функции «Середина или центр »



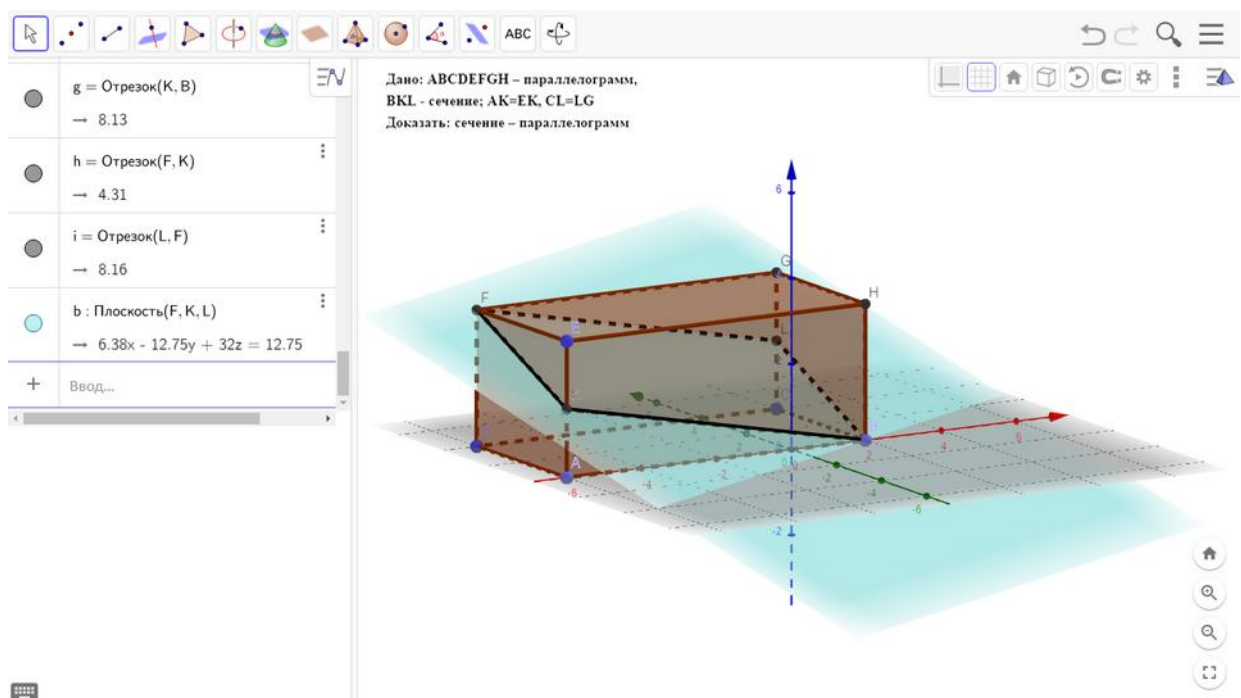
Через точку В проводим отрезки к точкам L и K с помощью функции «Отрезок»



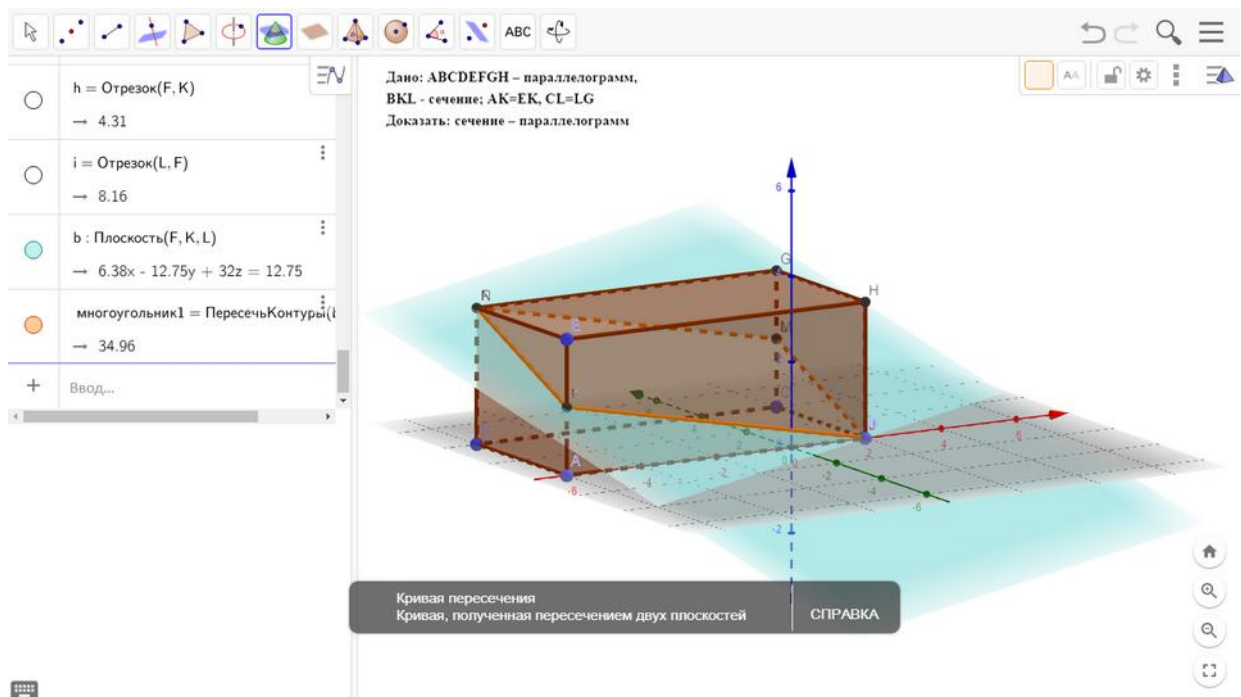
Проводим отрезок $LF \parallel KB$ и $KF \parallel BL$



Проводим плоскость сечения с помощью функции «Плоскость по трем точкам» и убираем наши отрезки



Затем с помощью функции «Кривая пересечений» достраиваем сечение $KFLB$



Докажем что KFLB - параллелограмм

Рассмотрим треугольники АКВ и LFG

$$AB=FG$$

$$AE=CG \Rightarrow AK=GL$$

$$\angle KAB = \angle FGL = 90$$

треугольники равны

Рассмотрим треугольники FEK и BCL

$$BC=FE$$

$$EK=GL$$

$$\angle FEK = \angle BCL = 90$$

треугольники равны

$$\Rightarrow KF=LB, FL=BK$$

ABCDEFGH – параллелепипед

$$\Rightarrow ABHE \parallel DFGC \text{ (FL} \parallel \text{BK)}$$

$$DFEA \parallel BCGH \text{ (KF} \parallel \text{LB)}$$

KFLB - параллелограмм

2) Дано: ABCDEFGH – параллелепипед

AC – диагональ основания, BH – диагональ параллелепипеда

Доказать: если ABCD – ромб, $\angle ABF = \angle CBF = 90^\circ$, то построенное сечение – равнобедренный треугольник.

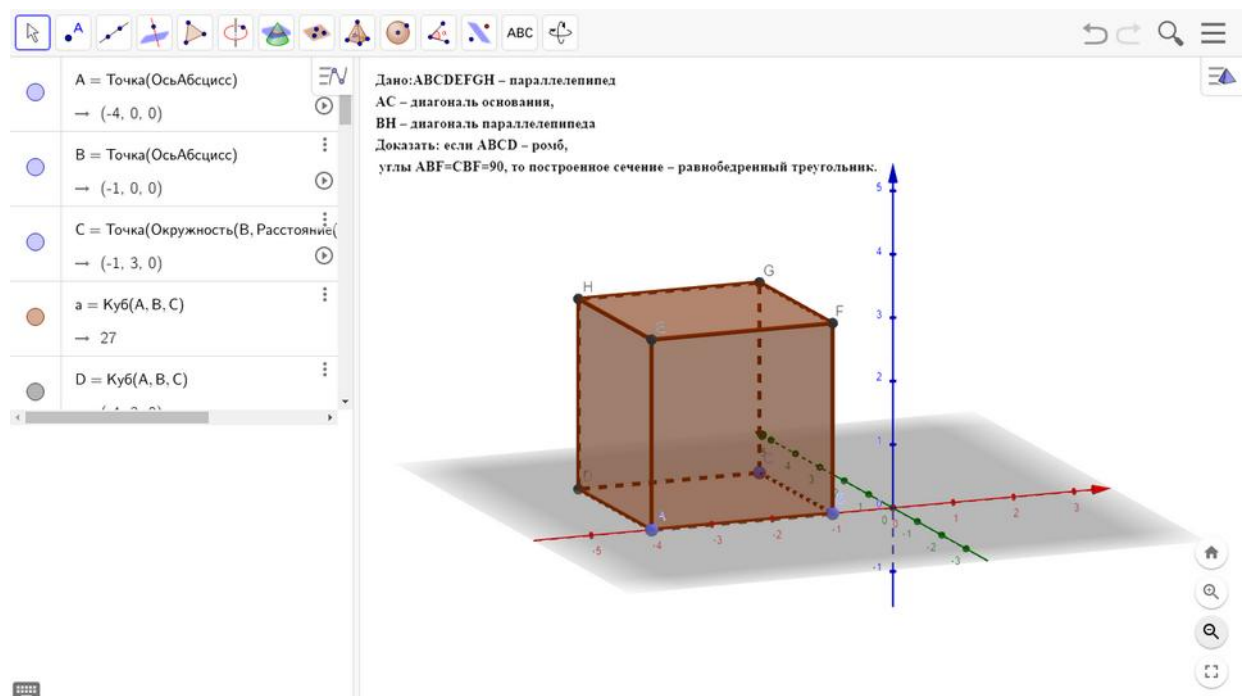
Доказательство:

1) Предположим что ABCD – ромб, следовательно, все ребра параллелепипеда равны

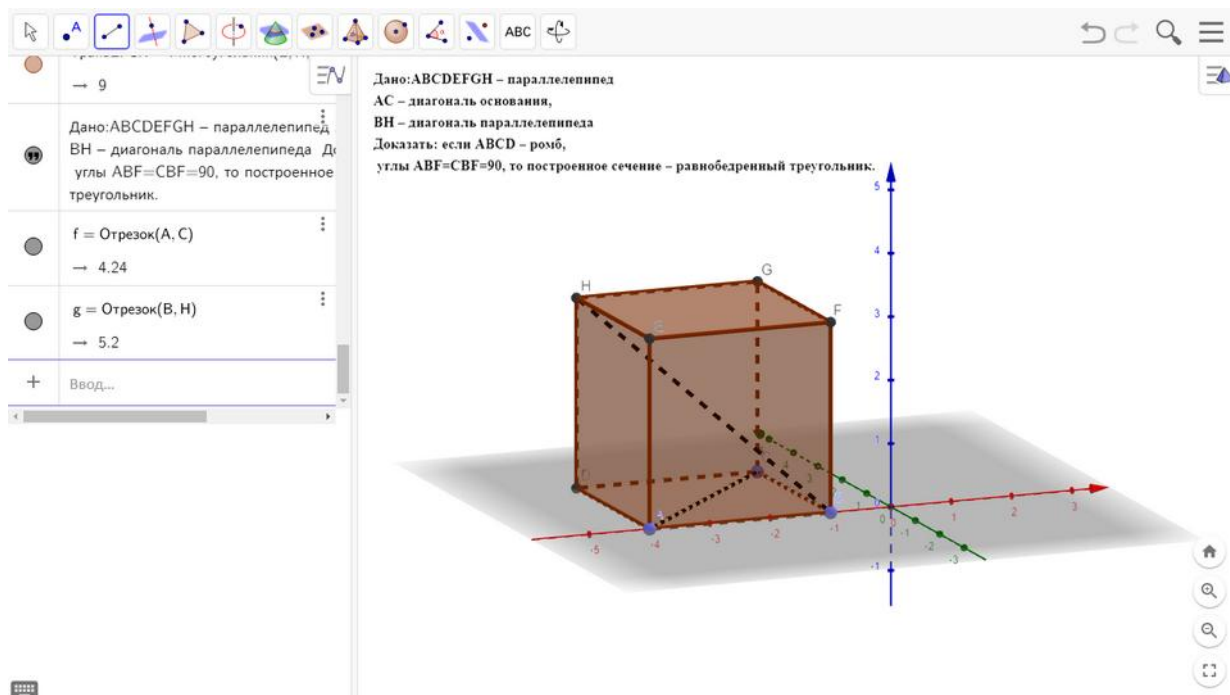
углы $\angle ABF = \angle CBF = 90^\circ$, $\Rightarrow$ ABCDEFGH – куб.

Сделаем построения:

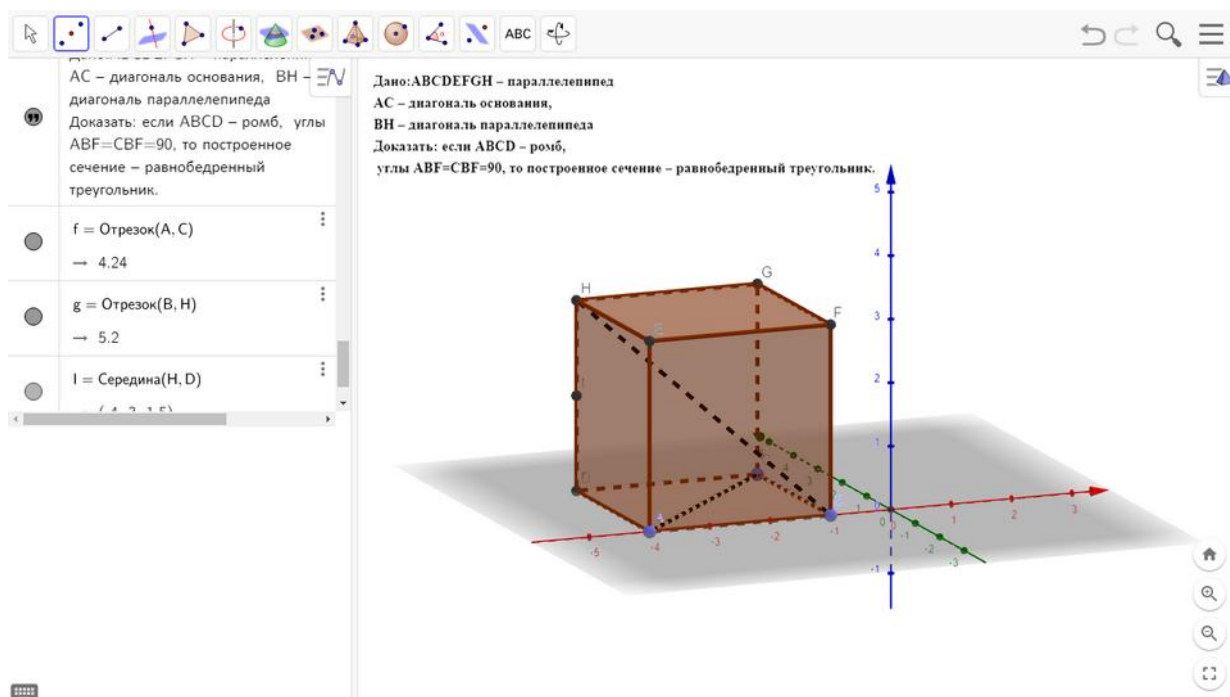
1) Строим куб с помощью функции «Куб», указав две точки



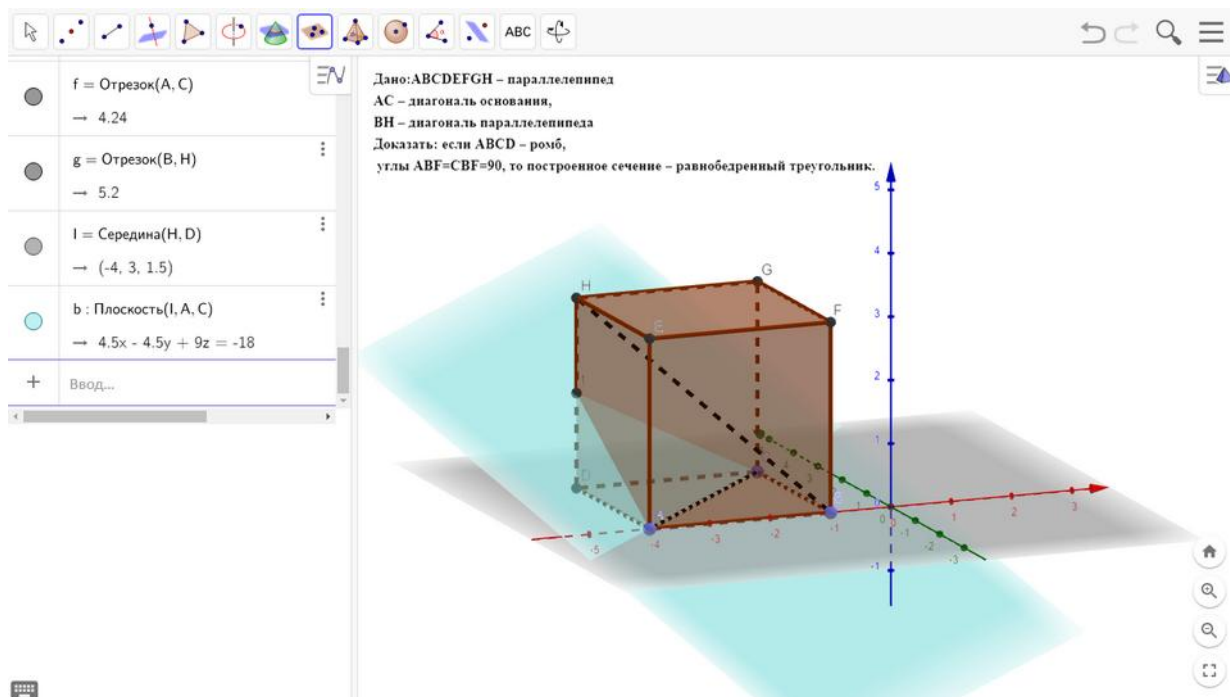
2) Проводим диагонали AC и BH с помощью функции «Отрезок»



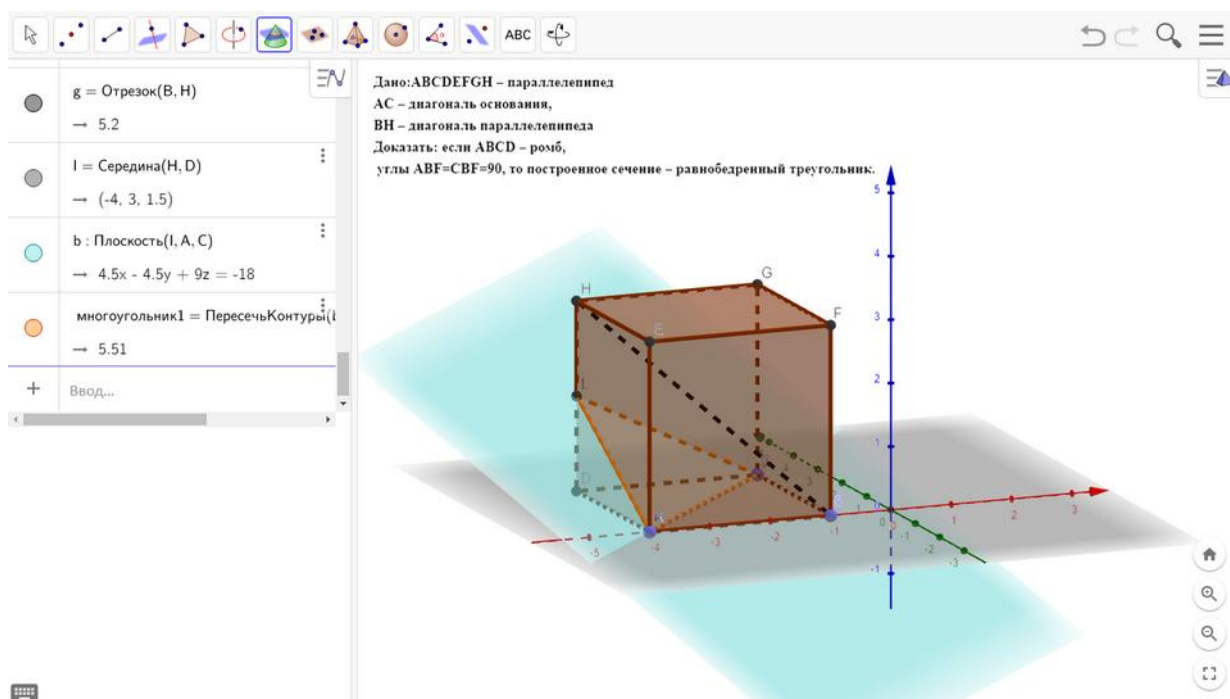
3) Строим сечение параллельно диагонали BH , для этого нужно отметить точку I – середину отрезка DH , это можно сделать с помощью функции «Середина или центр»



4) Теперь проведем плоскость через три точки A, I, C с помощью функции «Плоскость по трем точкам»



5) Используем функцию «Кривая пересечения», чтобы увидеть сечение



Теперь докажем что сечение AIC – равнобедренный треугольник

Рассмотрим треугольники ADI и CDI

DI – общая сторона

DC=AD (ABCD – квадрат)

$\angle IDA = \angle CDI = 90^\circ$

} треугольники равны $\Rightarrow IA=CI$

$$IA=CI$$

AC – диагональ квадрата ABCD

треугольник ACI – равнобедренный

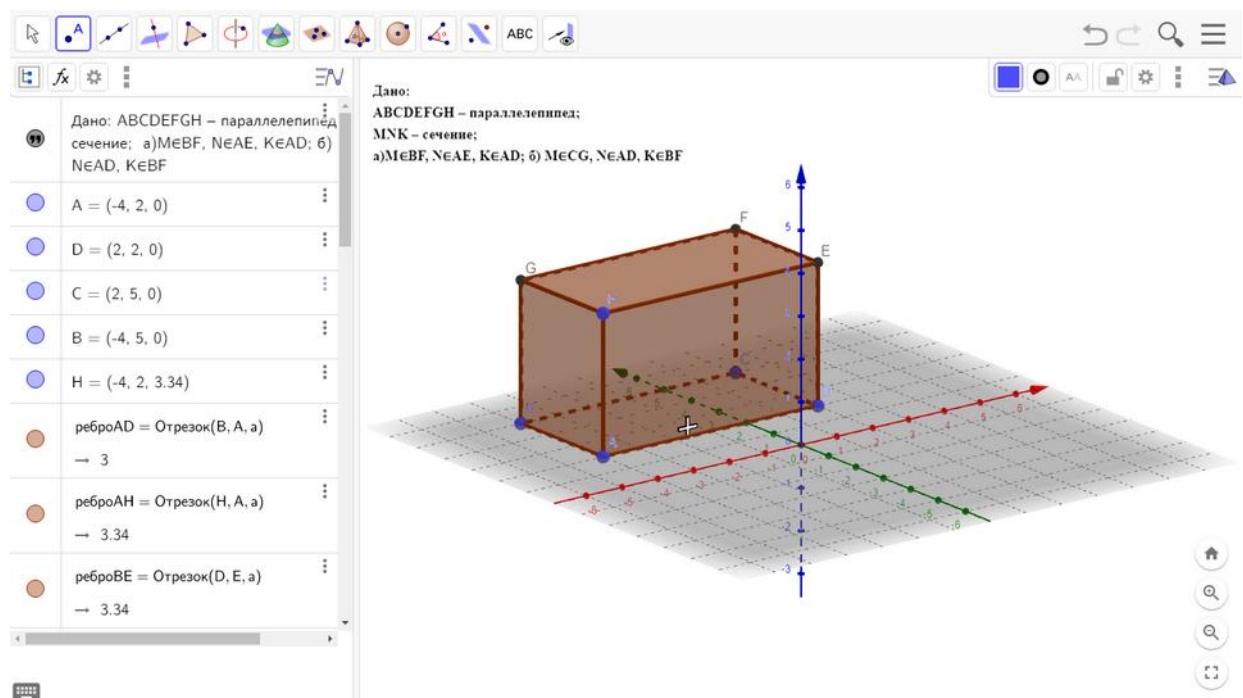
4. На построение

1) Дано: ABCDEFGH – параллелепипед; MNK – сечение;

а) $M \in BF$, $N \in AE$, $K \in AD$; б) $M \in CG$, $N \in AD$, $K \in BF$

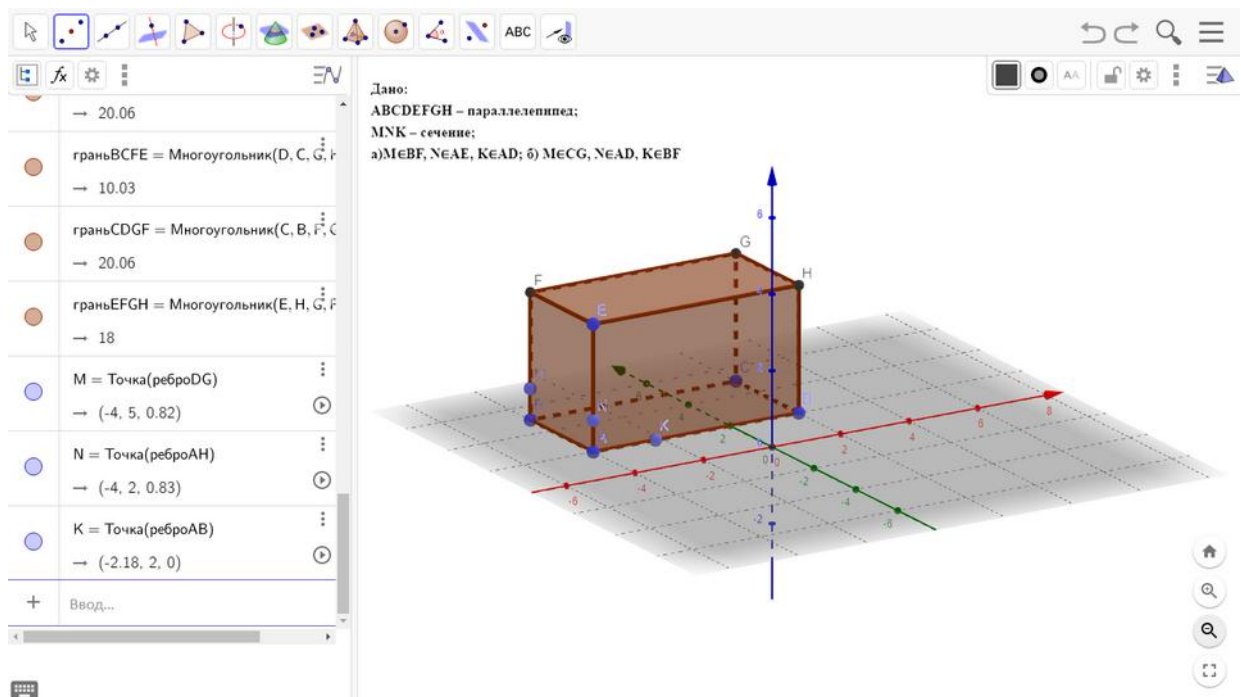
Сделаем построения:

Для построения параллелепипеда нам понадобится команда «Призма », мы строим четырехугольник и указываем его вершину, затем выравниваем по пунктиру до параллелепипеда.

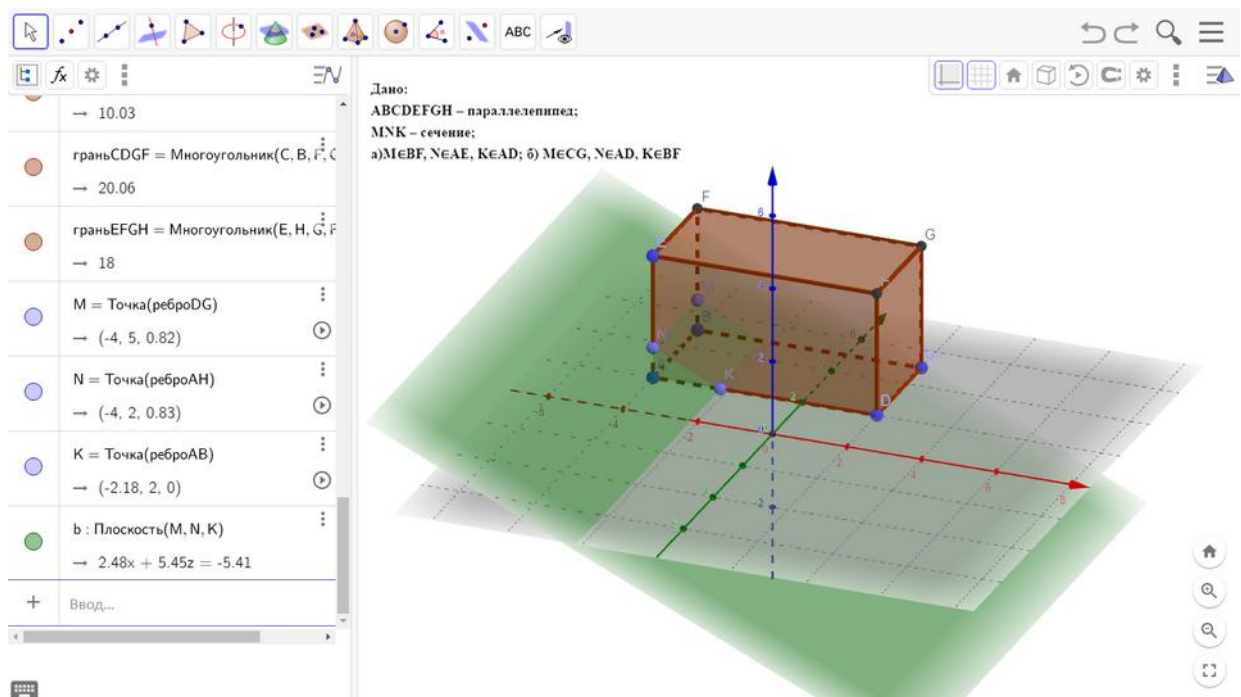


Рассмотрим первый случай, когда $M \in BF$, $N \in AE$, $K \in AD$.

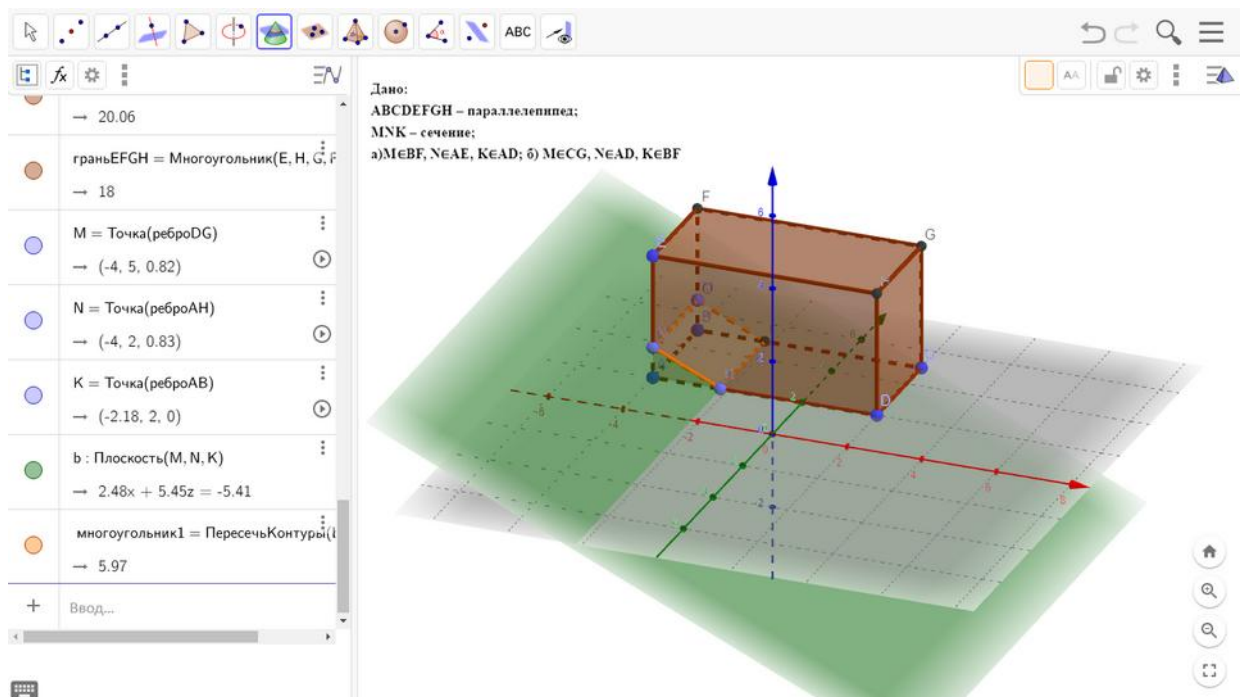
1) Указываем точки M, N, K на данных в условии ребрах. Т.к. не сказано где именно они лежат на этих ребрах, то мы можем их расположить на любом расстоянии.



2) Для того чтобы построить сечение, нам нужно построить плоскость, которая будет проходить через точки M, N, K. Используем функцию «Плоскость через три точки».



3) Получив пересечение двух плоскостей можно построить сечение. Для этого используем функцию «Кривая пересечения». Наводим курсор на место пересечения двух плоскостей и получаем сечение параллелепипеда.

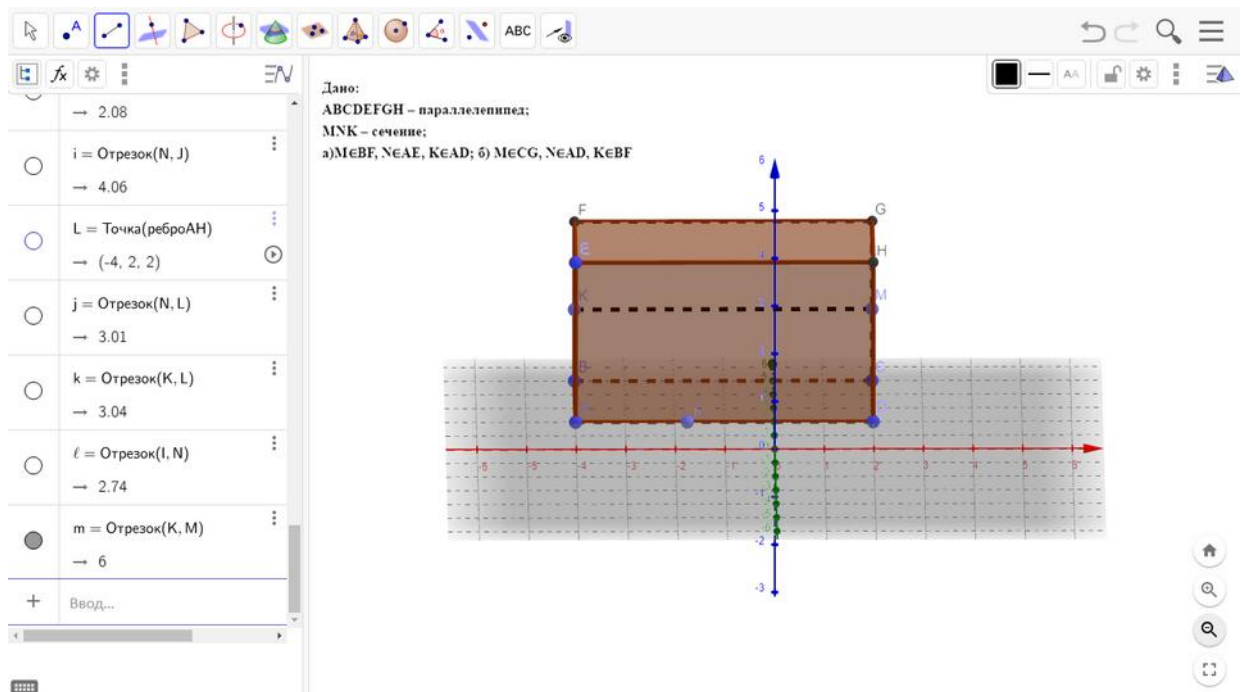


Рассмотрим второй случай, когда $M \in CG, N \in AD, K \in BF$

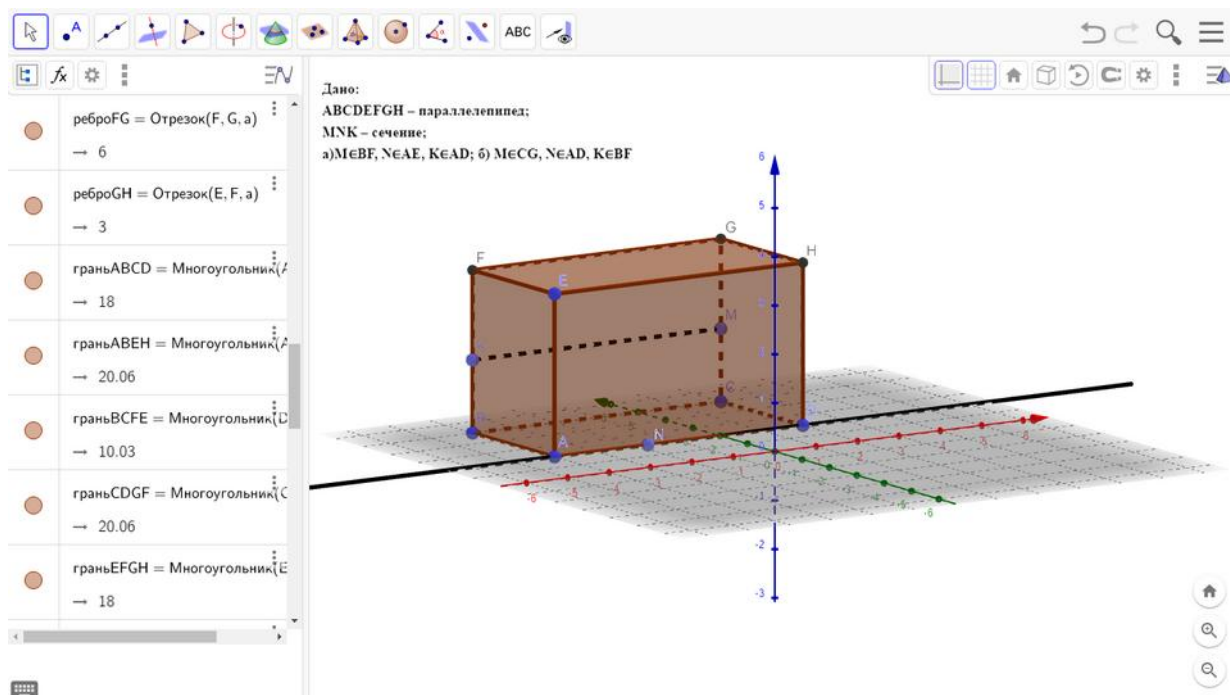
Здесь возможны два варианта:

$MK \parallel BC$

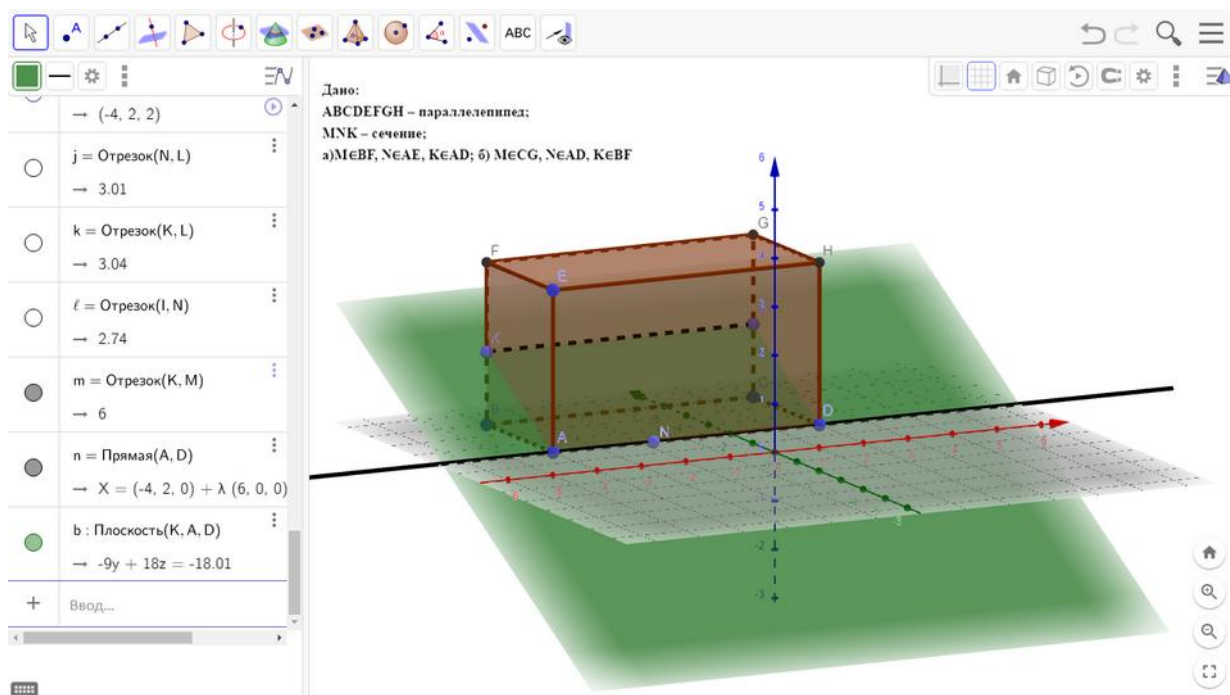
1) Проведем отрезок KM с помощью функции «Отрезок»



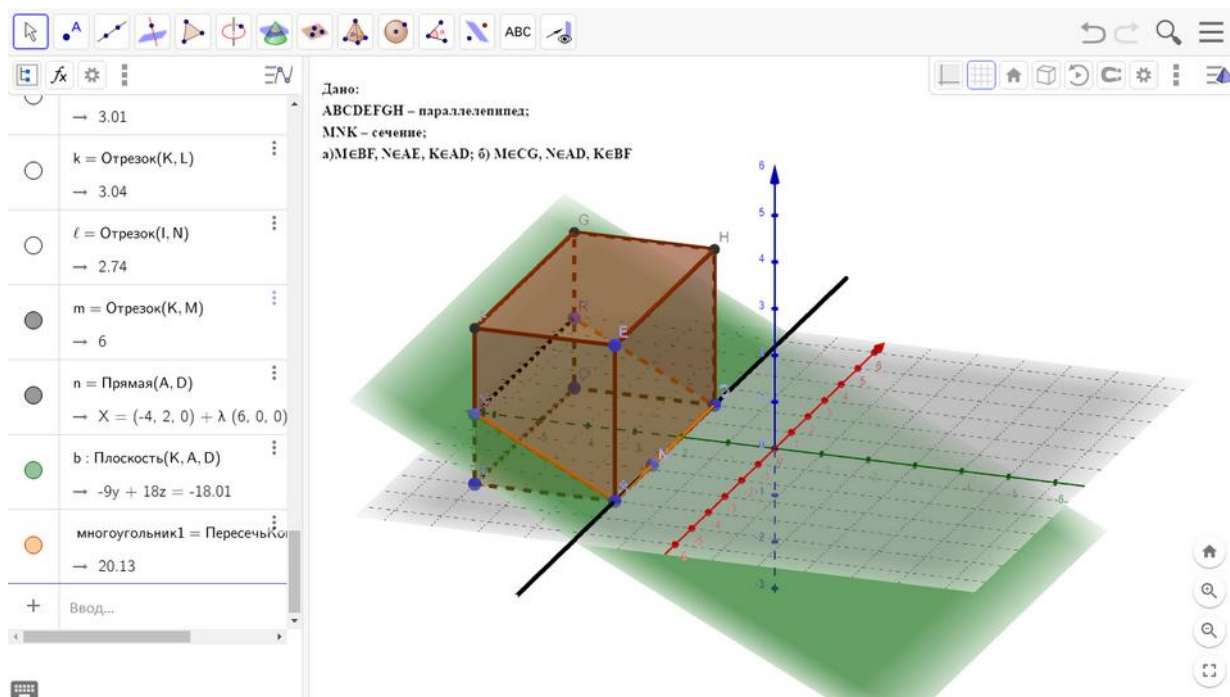
2) Проведем прямую через точку N с помощью функции «Прямая»



3) Осталось только соединить точку К с точкой А и М с D. Для того чтобы построить сечение, нам нужно построить плоскость, которая будет проходить через три точки. Используем функцию «Плоскость через три точки»

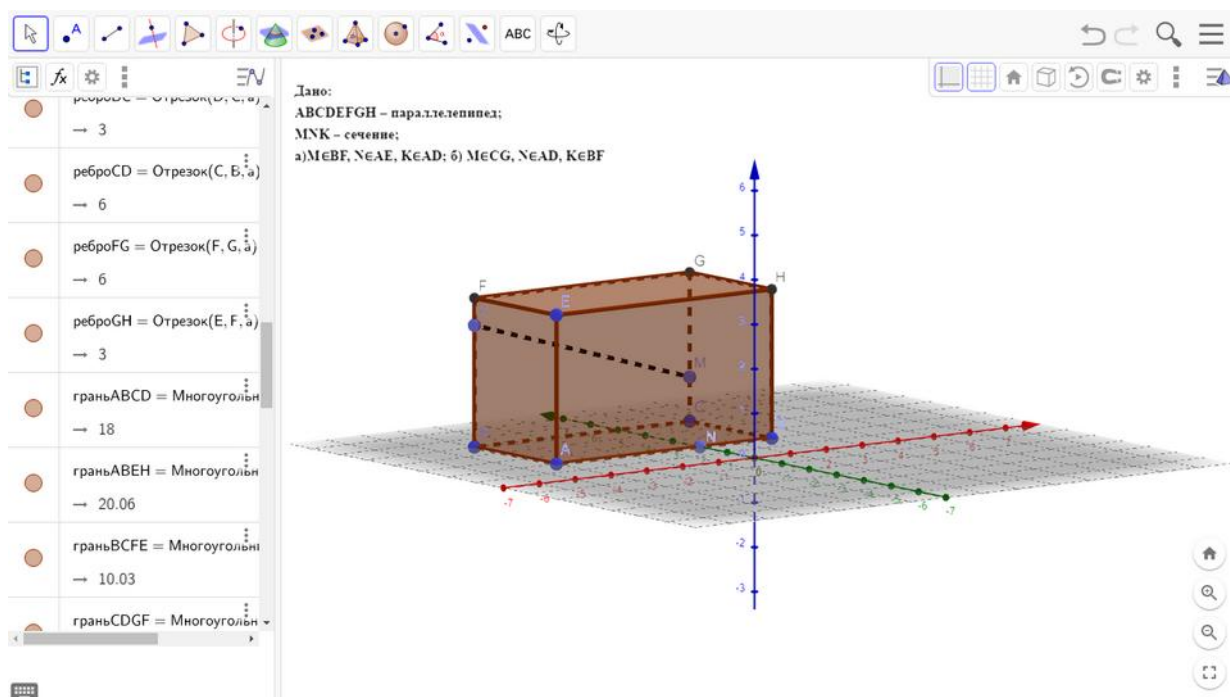


4) Получив пересечение двух плоскостей можно построить сечение, используя функцию «Кривая пересечения». Получаем сечение в виде четырехугольника – параллелограмма.

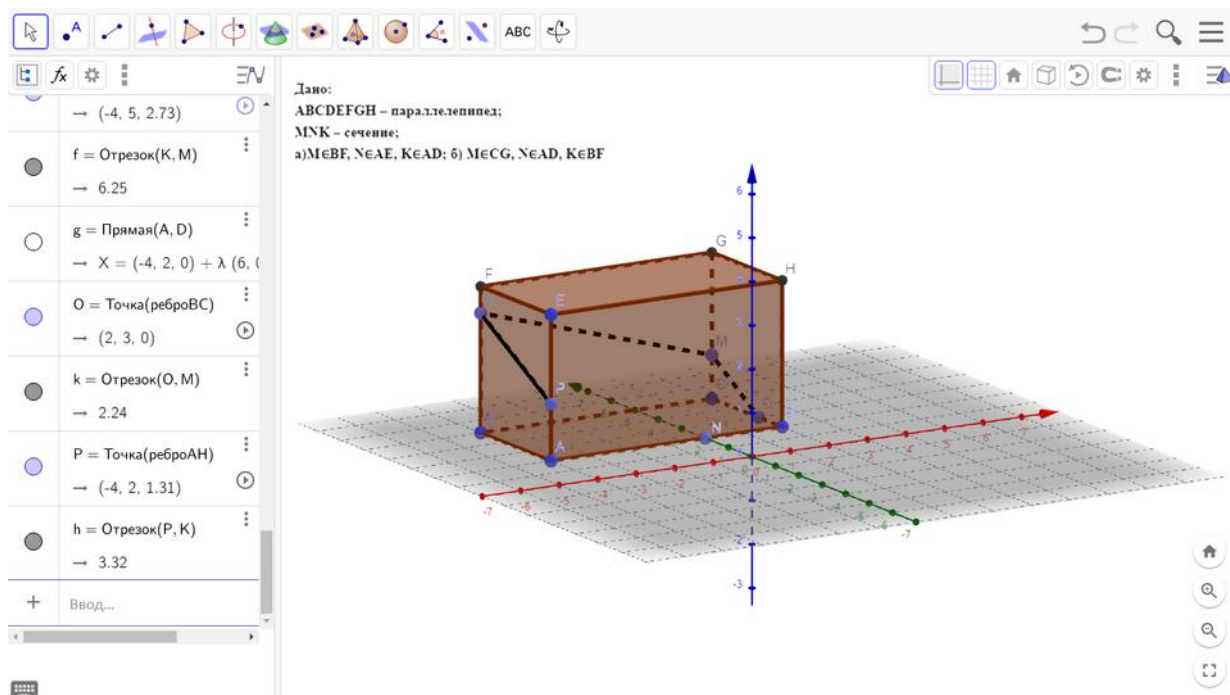


МК||BC

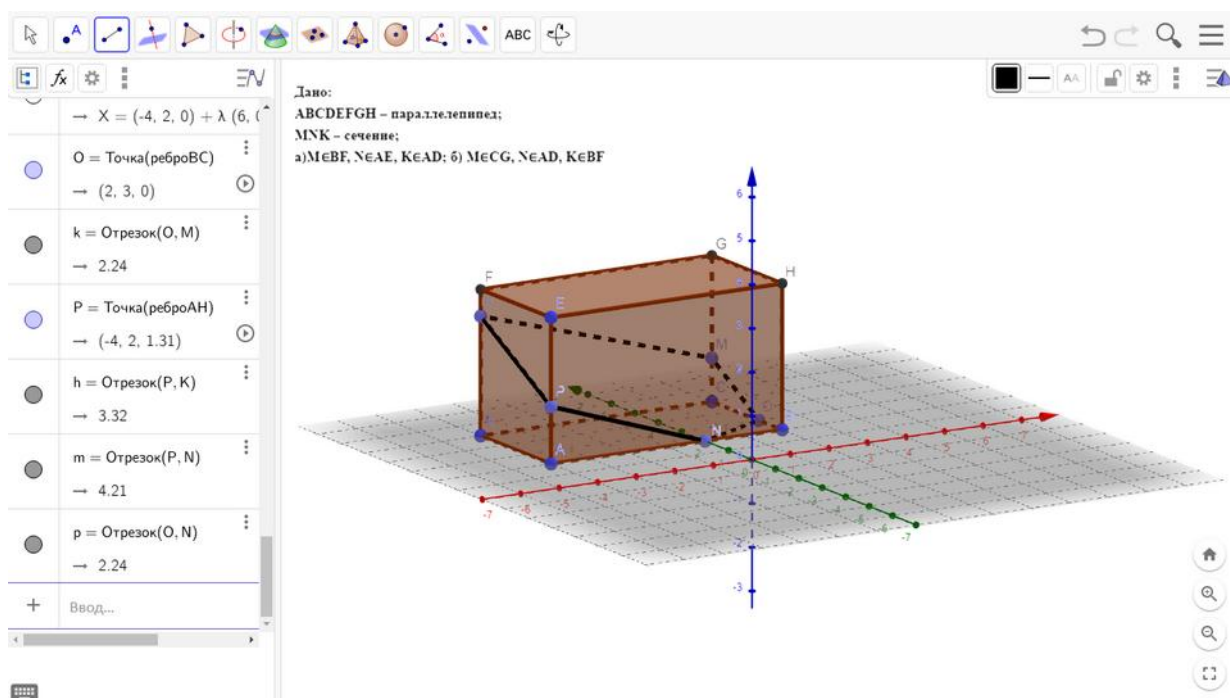
1) Построим отрезок МК, с помощью команды «Отрезок».



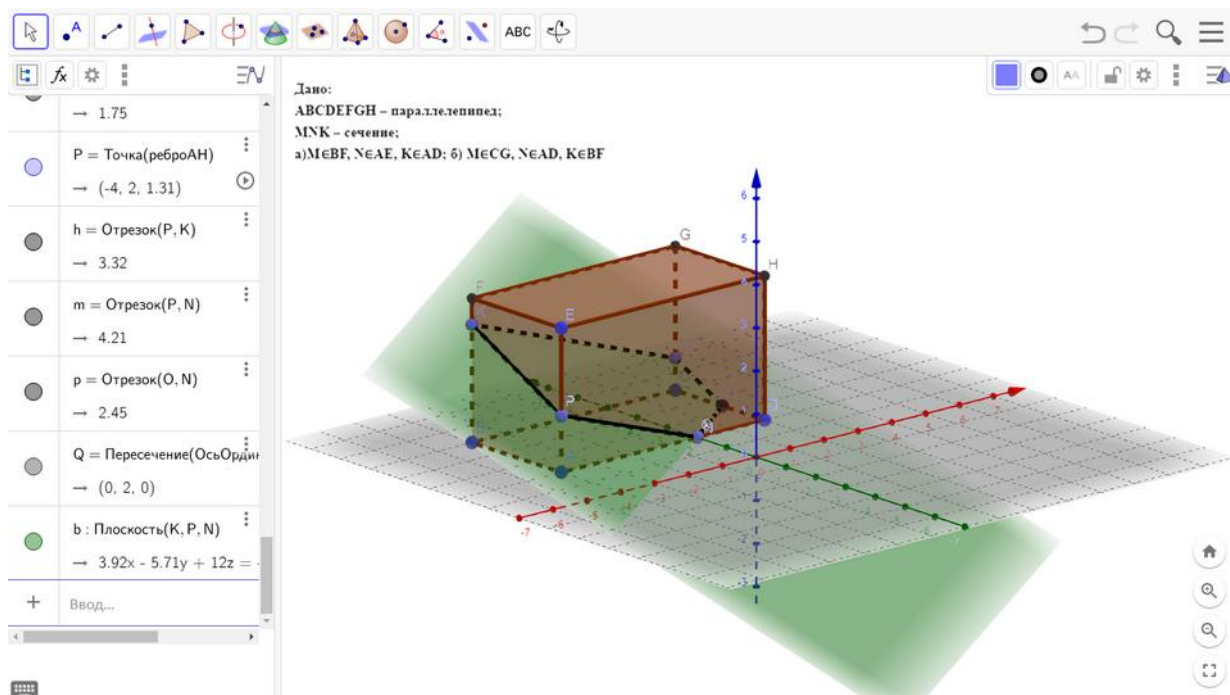
2) Строим параллельные отрезки КР и МО, с помощью функции «Отрезок»



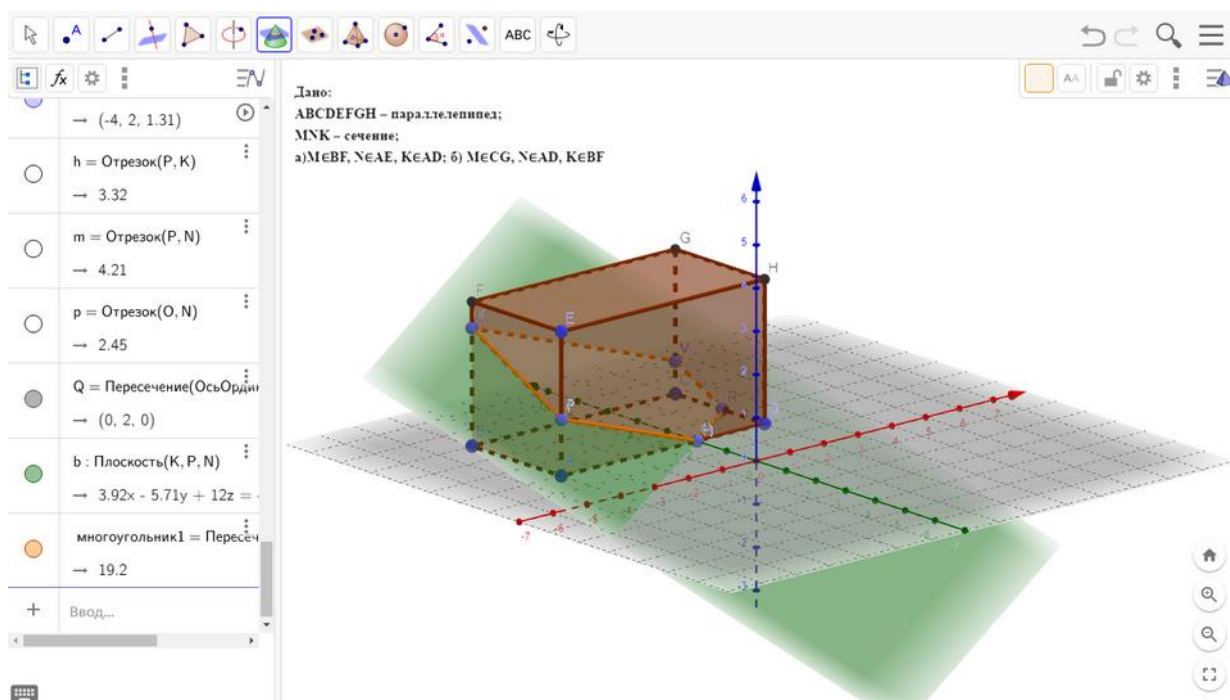
3) Построим сечение параллелепипеда, соединив точки P и M с точкой N, с помощью функции «Отрезок»



Проводим плоскость с помощью функции «Плоскость по трем точкам»



Теперь мы можем убрать наши отрезки и построить сечение с помощью функции «Кривая пересечения» 



Получаем сечение KMON – шестиугольник

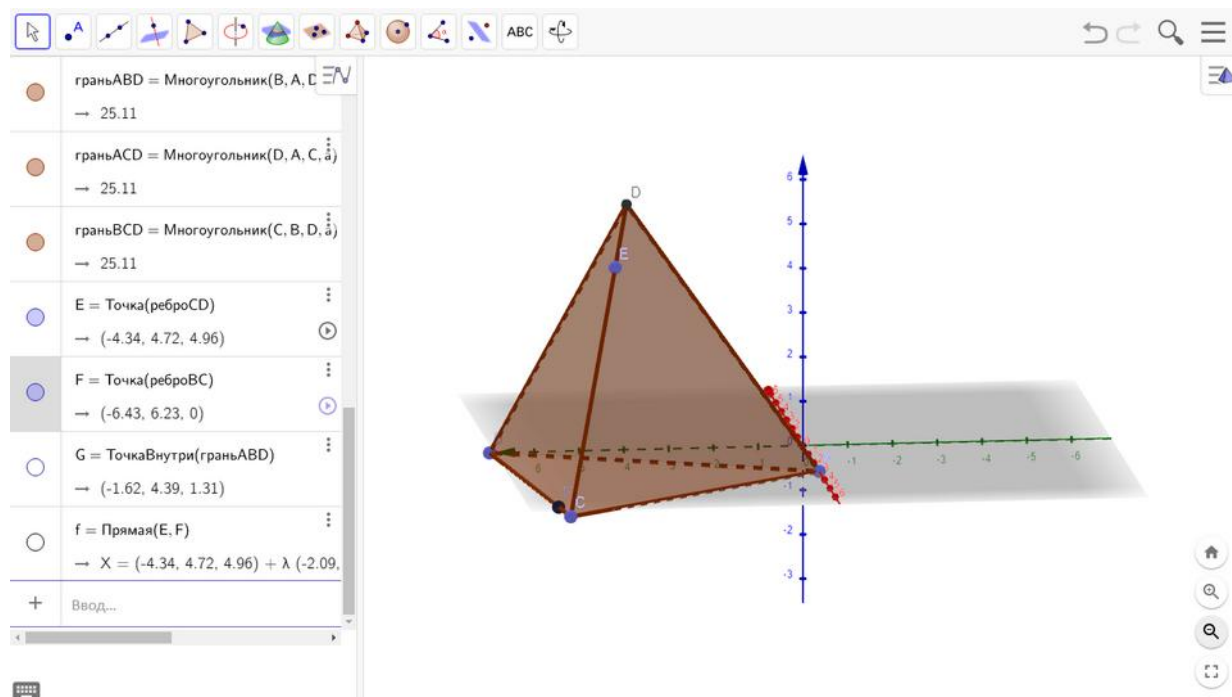
2) Дано: ABCD – тетраэдр; α - сечение

$E \in \alpha$, $F \in \alpha$, $G \in \alpha$

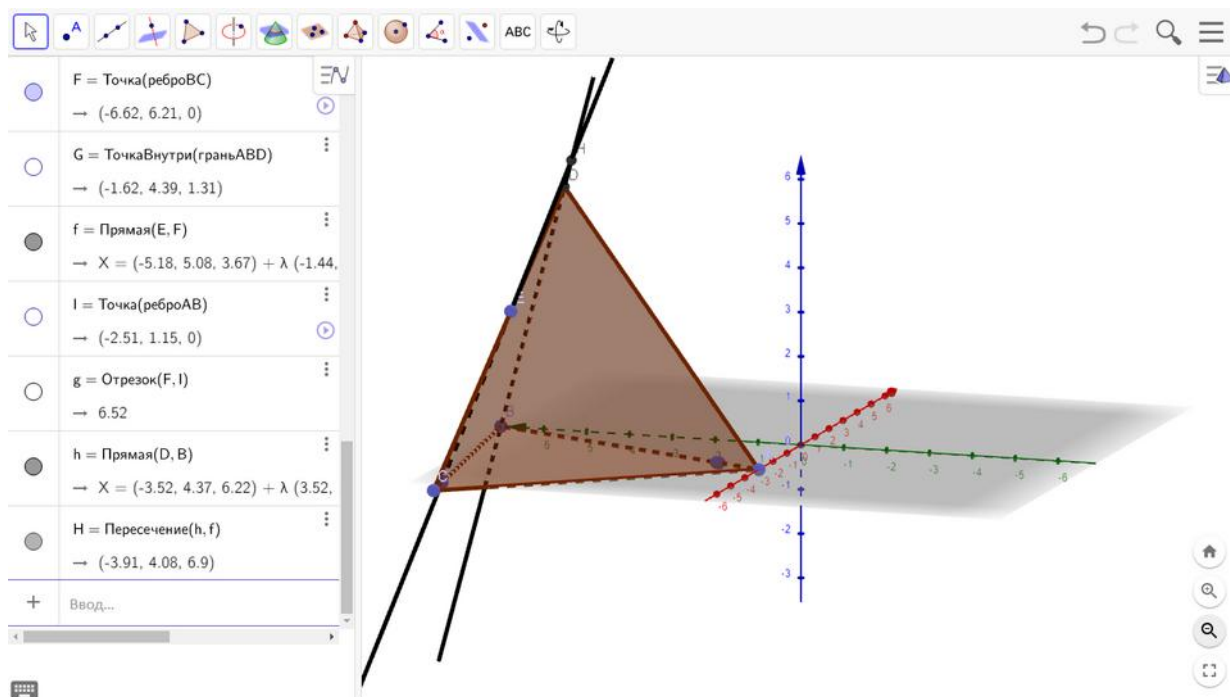
Построить сечение

Построения:

Строим тетраэдр ABCD, с помощью функции «Тетраэдр»  и отмечаем точки F и E, используя функцию «Точка» . Пусть $E \in CD$, а $F \in CB$.



2) Проводим прямую (h), (используя функцию «Прямая» ) через отрезок BD и отмечаем точку пересечения этой прямой с прямой(f), с помощью функции «Пересечение»  проходящей через отрезок FE, это будет точка H.

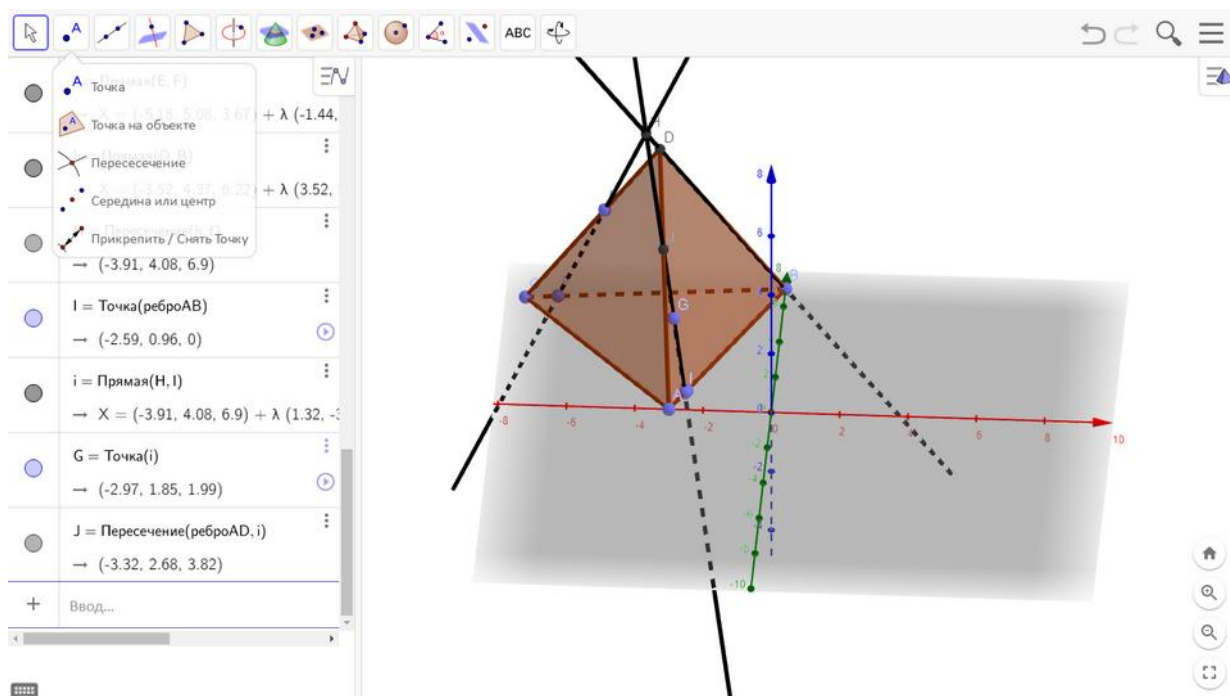


3)Отмечаем точки:

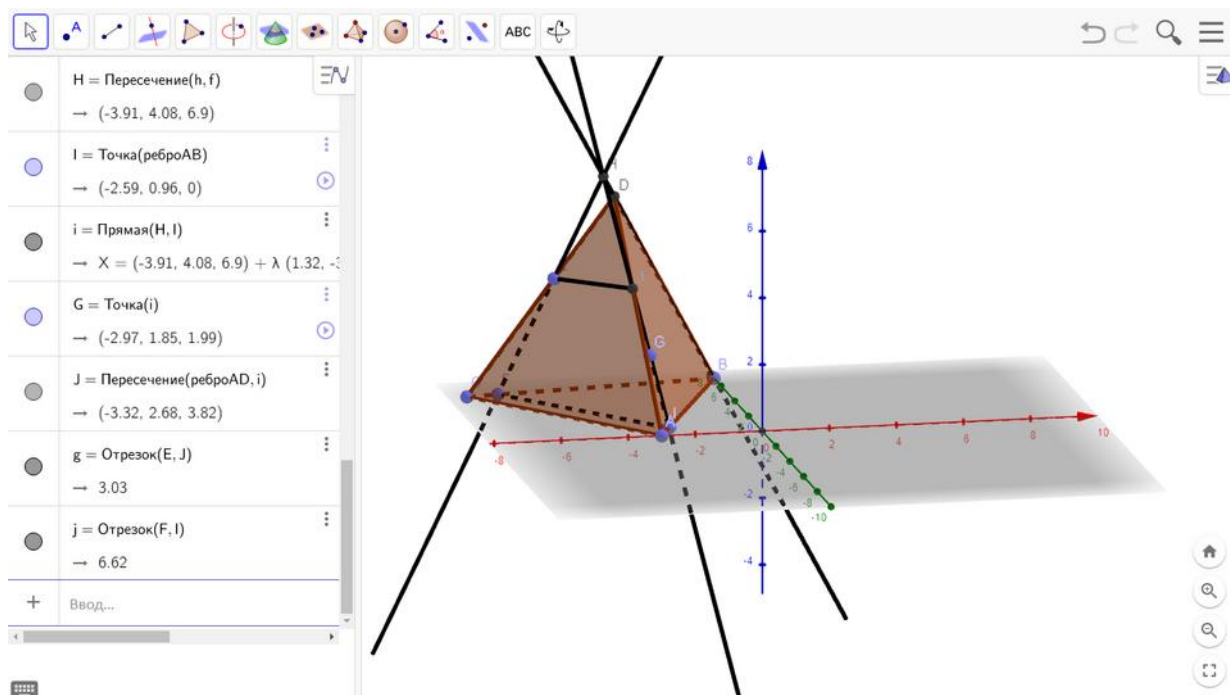
I – точка пересечения прямой h и ребра AB

точку $G \in h$

точка J – пересечение AD и h



4)Теперь соединяем точки: I с F, E с J, с помощью функции «Отрезок»



5)Получилось сечение в виде четырехугольника, но если мы перенесем точку G в точку A, то получим сечение в виде треугольника

